Concursul Fractal

A Cincea Ediție, 6 Aprilie 2025

Problema 1. Care este numărul minim de membri într-o familie astfel încât dacă acum suma vârstelor membrilor este de 60 de ani, iar peste un număr întreg de ani (adică la aceeași dată a altui an) suma vârstelor este de 75 de ani. (În fiecare an ce trece vârsta fiecărui membru crește cu exact un an).

Soluție: Răspunsul este 3. Într-o familie cu 3 persoane peste orice 5 ani vârsta totală crește cu 15 ani. Pentru a observa că familia nu poate avea 2 membri, o astfel de familie peste oricâți ani crește în total cu un număr par de ani.

Problema 2. Numerele p și $p^2 + 3$ sunt prime, arătați că numărul $p^3 + 3$ la fel este prim.

Soluție: Cum cel puțin unul dintre p și $p^2 + 3$ este un număr par și unicul număr prim par este 2 avem că sau $p^2 + 3$ este egal cu 2 ce nu este posibil, sau $p = 2$, când $p^3 + 3 = 11$ care e prim.

Problema 3. Care dintre numerele 2024, 2025 și 2026 poate fi scris ca diferența a două pătrate perfecte?

Soluție: Unicele numere care nu pot fi scrise ca diferență de 2 pătrate perfecte nenule sunt $1, 4$ și numerele care dau restul 2 la împărțire la 4. Este cunoscut că un pătrat perfect dă restul 1 sau 0 la împărțire la 4, deci numerele care dau restul 2 la împărțire la 4 nu pot fi scrise ca o astfel de diferență. Ca să arătăm că numerele impare mai mari decât 1 pot fi reprezentate avem $(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$, și ca să arătăm că cele divizibile la 4 pot fi scrise, avem $(x+2)^2 - x^2 = 4x + 4$, deci 2026 care dă restul 2 la împărțire la 4 nu poate fi scris, iar celelalte două pot.

Problema 4. Găsiți cel mai mare divizor comun al numerelor: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots 2025 \cdot 2026 \cdot 2027 \cdot 2028 \cdot 2029$.

Soluție: Răspunsul este $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Pentru a arăta că acest număr divide oricare din produsele de mai sus vom arăta că el divide produsul oricăror 5 numere consecutive. Într-adevăr, unul din 5 numere e divizibil la 5, deci un astfel de produs e divizibil la 5. Analog, unul din 5 numere e divizibil la 3, deci un astfel de produs e divizibil și la 3. Rămâne să arătăm că acesta se împartye la 8. Este clar că printre 5 numere consecutive unul e divizibil la 4, fie acesta x. Cel puțin unul dintre $x - 2$ și $x + 2$ este în aceste 5 numere consecutive și tot e par, deci 4 divide x și încă 2 divide $x - 2$ sau $x + 2$, ce înseamnă că 8 divide produsul.